

令和6年度医学科入学試験問題

数 学

〔注意事項〕

- 1 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけない。
- 2 解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。
- 3 この問題冊子の本文は、4ページからなっている。落丁、乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば、手をあげて監督者に知らせること。
- 4 この問題冊子の計算用紙と余白は、適宜下書きに使用してもよい。
- 5 解答は、すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。
- 6 この問題冊子は持ち帰ること。

1 x は $x \neq 0, \pm 1$ である実数とし, $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ とおく. c は実数とし, x の方程式

$$(E) \quad x + f(x) + f(f(x)) + f(f(f(x))) = c$$

を考える.

(1) $f(f(f(f(x)))) = x$ であることを証明せよ.

(2) $x = a$ が方程式 (E) の実数解であるとき

$$f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$$

も (E) の実数解であることを証明せよ.

(3) (E) の実数解 $x = a$ に対して

$$y_1 = a + f(f(a)), \quad y_2 = f(a) + f(f(f(a)))$$

とおく. y_1, y_2 が y の 2 次方程式 $y^2 - cy - 4 = 0$ の解であることを証明せよ.

(4) $c = 3$ のとき方程式 (E) を解け.

2 以下のような硬貨投げを行う。

1 枚の硬貨を投げて裏が出たら硬貨投げを終了し、表が出たら 1 枚の硬貨を加え 2 枚の硬貨を同時に投げる。2 枚の硬貨のうち 1 枚でも裏が出たら硬貨投げを終了し、全部が表ならば 1 枚の硬貨を加え 3 枚の硬貨を同時に投げる。3 枚のうち 1 枚でも裏が出たら硬貨投げを終了し、全部が表ならば 1 枚の硬貨を加え 4 枚の硬貨を同時に投げる。以下同様にして全部が表ならば 1 枚の硬貨を加えて硬貨投げを続ける。

1 枚の硬貨から始めて、硬貨が n 枚のときに硬貨投げが終了する確率を p_n ($n \geq 1$) とする。

- (1) p_n を n を用いて表せ。
- (2) 無限級数の和 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ を求めよ。
- (3) $P = \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n-1}$ とおく。 $0.6 < P < 0.62$ であることを証明せよ。ここで $\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n-1}$ が収束することは用いてよい。

3 半径 1 の円に内接する五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ を考える。線分 A_1A_4 と A_2A_5 の交点を B とし、 $\triangle A_1A_2B$ は正三角形であるとする。また、 $A_3A_2 = A_3A_4$ とする。 $a = A_1A_2$ 、 $b = A_4A_5$ とおく。

- (1) 線分 A_3B の長さを求めよ。
- (2) b を a を用いて表せ。
- (3) 五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の面積 S を a を用いて表し、 S の最大値を求めよ。

4 xyz 空間の点 $A(-2, 0, 0)$, $B(2, -2\sqrt{3}, 0)$, $C(-1, \sqrt{3}, 0)$,
 $D(-1, \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ を頂点とする四面体 $ABCD$ を K とする。実数 t に対し
て、方程式 $x = t$ で表される平面を H とする。

- (1) $-2 \leq t \leq 2$ のとき、平面 H と K の辺 AB との共有点を P とする。 P の座標を t を用いて表せ。
- (2) $-2 \leq t \leq -1$ のとき、平面 H と K の辺 AC , AD との共有点をそれぞれ Q , R とする。 Q , R の座標を t を用いて表せ。
- (3) $-1 \leq t \leq 2$ のとき、平面 H と K の辺 BC , BD との共有点をそれぞれ Q' , R' とする。 Q' , R' の座標を t を用いて表せ。
- (4) K を x 軸のまわりに 1 回転させるとき、 K が通過する部分がつくる立体の体積 V を求めよ。

(計 算 用 紙)