

数 学

(数Ⅰ，数Ⅱ，数Ⅲ，数A，数B)

9：00～11：00

注 意

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはならない。
2. 問題紙は3ページある。

3. 解答用紙は

解答用紙番号
数学0—1

(問①用)，

解答用紙番号
数学0—2

(問②用)，

解答用紙番号
数学0—3

(問③用)，

解答用紙番号
数学0—4

(問④用)，

解答用紙番号
数学0—5

(問⑤用)の5枚である。

4. 解答用紙は5枚とも全部必ず提出せよ。
5. 受験番号および座席番号(上下2箇所)は，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。
6. 各問に対する解答は，それぞれ3で指定された解答用紙に記入せよ。
ただし，裏面を使用してはならない。
7. 必要以外のことを解答用紙に書いてはならない。
8. 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
9. 下書き用紙は回収しない。

解 答 上 の 注 意

採点時には，結果を導く過程を重視するので，必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

1 t を実数とし、 xy 平面上の点 $P(\cos 2t, \cos t)$ および点 $Q(\sin t, \sin 2t)$ を考える。

(1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ。

(2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき、点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。ただし、 x 軸、 y 軸との共有点がある場合は、それらの座標を求め、図中に記せ。

2 各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」、「2」、「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり、残りの 5 つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて、出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は 0 とし、この試行を繰り返す。例えば、3 回の試行を行ったとき、出た面に書かれた数が「0」、「2」、「3」であれば、持ち点は 5 となる。なお、さいころが水平な床面にあるとき、さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また、さいころを投げるとき、各面が出ることは同様に確からしいとする。

(1) この試行を n 回行ったとき、持ち点が 2 以下である確率を求めよ。ただし、 n は 2 以上の自然数とする。

(2) この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上であったときに、さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上である条件付き確率を求めよ。

3 次の間に答えよ。

(1) α を実数とする。次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ を次の関係式で定める。

$$f_1(x) = 3x$$
$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。

4 三角形 OAB が、 $|\vec{OA}| = 3$ 、 $|\vec{AB}| = 5$ 、 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 10$ をみたしているとする。三角形 OAB の内接円の中心を I とし、この内接円と辺 OA の接点を H とする。

(1) 辺 OB の長さを求めよ。

(2) \vec{OI} を \vec{OA} と \vec{OB} を用いて表せ。

(3) \vec{HI} を \vec{OA} と \vec{OB} を用いて表せ。

5 関数

$$f(x) = x \log(x+2) + 1 \quad (x > -2)$$

を考える。 $y = f(x)$ で表される曲線を C とする。 C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを l とする。ただし、 $\log t$ は t の自然対数である。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ。

(3) C と l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。