前期日程

2024年度

数学問題

現代システム科学域〔知識情報システム学類，学域募集（英・数型）〕
・理学部・工学部・農学部・獣医学部・医学部医学科

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で8ページ，解答用紙は全部で4枚である．脱落のあった場合には申し出ること．

3　解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ受験番号（最後のページは，左右2箇所），氏名を必ず記入すること．なお，解答用紙は上部で接着してあるので，はがさず解答すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある．

6　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない．

7　問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

8　問題冊子は持ち帰ること．

第 1 問 （50点）

次の問いに答えよ．

問1　$x \geqq 0$ に対して，$x - \dfrac{x^2}{2} \leqq \sin x$ が成り立つことを示せ．

問2　自然数 n に対して，a_n を

$$a_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \sin\frac{3}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2}$$

と定めるとき，数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．

問3　α を実数とする．自然数 n に対して，b_n を

$$b_n = n^{\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

と定めるとき，数列 $\{b_n\}$ が収束するような α の値の範囲とそのときの極限値を求めよ．

第 2 問 （50点）

b, c は実数で $c>0$ とする．4次方程式 $x^4+bx^2+c^2=0$ について，次の問いに答えよ．

問1　4個の相異なる虚数解をもつための b と c の条件を求めよ．

問2　問1で求めた条件の下で，二重根号を用いずに4個の解を表せ．

問3　問2で求めた4個の解が，複素数平面上の同一円周上にあるための b と c の条件を求めよ．

問4　問2で求めた4個の解が，複素数平面上の同一直線上に等間隔に並ぶための b と c の条件を求めよ．

第　3　問　（50点）

固定された直線に円が接しながら滑ることなく回転するときに，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドというが，その類似として，固定された半円に線分が接しながら滑ることなく回転するときに，線分上の定点が描く曲線を考える．すなわち，xy 平面の単位円 $x^2+y^2=1$ の $y \geqq 0$ の部分にある半円を C とし，長さ π の線分 AB が半円 C に接しながら滑らずに動くとする．始めに点 A は $(1,0)$, 点 B は $(1,\pi)$ の位置にあり，点 B が $(-1,0)$ に到達したときに動きを止めるものとし，この間に点 A が描く xy 平面上の曲線を L とする．次の問いに答えよ．

問 1　不定積分 $\displaystyle\int \theta \sin a\theta \, d\theta$ と $\displaystyle\int \theta^2 \cos a\theta \, d\theta$ をそれぞれ求めよ．ただし，a は正の定数とする．

問 2　半円 C と線分 AB の接点が $(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ のときの点 A の座標を求めよ．

問 3　曲線 L と x 軸および直線 $x=-1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

第 4 問 (50点)

以下の条件を満たす実数 a, p, q を考える.

$$\begin{cases} 5p^2 + 2p = q^2 + 5q \\ q = ap \\ pq \neq 0 \end{cases}$$

次の問いに答えよ.

問 1 $a \neq \pm\sqrt{5}$ のとき, p と q をそれぞれ a を用いて表せ.

問 2 a は有理数で, $a = \dfrac{m}{k}$ と既約分数で表示されているとする. ただし, k は自然数, m は整数とする.

1. $5m - 2k$ が $5k^2 - m^2$ の倍数ならば, p と q はともに整数であることを証明せよ.
2. 逆に, p と q がともに整数ならば, $5m - 2k$ は $5k^2 - m^2$ の倍数であることを証明せよ.
3. p と q がともに整数ならば, 121 は $5k^2 - m^2$ の倍数であることを証明せよ.