令和6年度

試験問題

数　　学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．

2. 試験開始後，問題冊子，解答用紙の印刷不鮮明や汚れ，問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは，手を挙げて監督者に知らせよ．

3. 監督者の指示に従い，解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．受験番号欄は合計4箇所ある．受験番号未記入の解答用紙は採点されない．

4. 解答は所定の解答欄に記入せよ．不足する場合は裏面に解答してもよい．解答用紙はどのページも切り離してはならない．

5. 試験時間は2時間である．

6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってよい．

—余白—
(このページに問題はありません)

1 t を実数とする．閉区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で連続，かつ $0 < x < \pi, x \neq \frac{\pi}{2}$ において微分可能な関数 $f(x)$ は次の 2 条件 $(a), (b)$ を満たしている．

(a) $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(b) $f'(x) = \begin{cases} \sin x + 2t^2, & (0 < x < \frac{\pi}{2}), \\ \cos x + t, & (\frac{\pi}{2} < x < \pi) \end{cases}$

(ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す.)

(1) $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ を求めよ．

(2) t が実数全体を動くとき，定積分 $F(t) = \int_0^{\pi} f(x)dx$ を最大にする t の値，および $F(t)$ の最大値を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$ を以下の漸化式により定める：

$a_1 = 2, a_{n+1} = 1 + a_1 a_2 \cdots a_n$ $(n \geqq 1)$.

また，数列 $\{b_n\}$ の第 n 項 b_n を $b_n = (n+1)(a_{n+3} - 1) + 2$ と定める．

(1) 任意の正整数 n に対して，等式

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 1 - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 実数 r に対して $[r]$ は r 以下の整数の中で最大のものを表す．任意の整数 β, 及び 2 以上の任意の整数 m に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\left[\frac{\beta(m-1)}{m}\right] \geqq \frac{(\beta-1)(m-1)}{m}$$

(3) 正整数 n を任意に一つ選んで固定し，実数 x の関数 $f_n(x)$ を次のように定める:

$$f_n(x) = -(n+1)x + \sum_{i=1}^{n+2} \left[\frac{(a_i - 1)x}{a_i}\right].$$

このとき，$k \geqq b_n$ なる任意の正整数 k に対して不等式 $f_n(k) > 0$ が成り立ち，かつ正整数 $k_n = b_n - 1$ に対して等式 $f_n(k_n) = 0$ が成り立つことを証明せよ．

3　xyz 空間において原点 O $(0,0,0)$ を中心とする半径 1 の球面を S とする．球面 S から 2 点 N $(0,0,1)$ と S $(0,0,-1)$ を除いた部分を D とする．D に属する任意の点 P (x,y,z) に対して，2 点 N,P を通る直線と xy 平面 $z=0$ との交点を Q, かつ 2 点 S,P を通る直線と xy 平面 $z=0$ との交点を R とおく．

(1)　点 Q の座標 $(u,v,0)$ と点 R の座標 $(s,t,0)$ とを求めよ．

(2)　i を虚数単位とする．複素数 $w=s+it$ を複素数 $z=u+iv$ の関数として表示せよ．

(3)　2 点 N,R を通る直線と球面 S との交点を X とおく．すると xyz 空間において原点 O を通る平面 H が存在し，点 P が D 全体を動くとき，点 X は点 P を平面 H に関して対称に折り返して得られることを証明せよ．

4　1 より大きい整数 k を固定する．

(1)　もし k 個の正の実数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ が等式 $x_1x_2\cdots x_k=1$ を満たすならば，不等式

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2 \geqq x_1+x_2+\cdots+x_k$$

が成り立つことを証明せよ．

(2)　実数 b に対して以下の条件 (F) を考える．

– 条件 (F): k 個の正の実数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ の積が 1 に等しい，即ち $a_1a_2\cdots a_k=1$ ならば，常に次の不等式が成り立つ．

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2 > \lceil a_1+a_2+\cdots+a_k \rceil + b$$

(ただし，実数 r に対して $\lceil r \rceil$ は r 以上の整数の中で最小のものを表す.)

条件 (F) を満たす実数 b の中で，$b=-1$ は最大であることを証明せよ．

ー余白ー

(このページ以降に問題はありません)