物　理　解答は解答用紙の所定の欄に記入すること。

I　各問の答を解答群より選び，番号で答えよ。

問1　図1のように，鉛直に立てた二本の柱の間に質量 m の一様なロープが張られている。ロープと柱との接点（高さ h）においてロープの接線が水平面となす角度を θ とする。ロープの重量により柱に働く力のモーメント（地面と柱との交点Aを回転の中心とする）を求めよ。重力加速度を g とする。

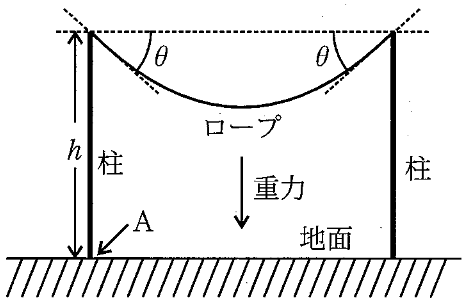


図1

① $\dfrac{1}{2}mgh$　② $\dfrac{1}{2}mgh\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　③ $\dfrac{1}{2}mgh\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

④ $\dfrac{1}{2}mgh\sin\theta\cos\theta$　⑤ $\dfrac{1}{2}mgh\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

問2　図2のように，小さなスピーカーと2つの小さな穴A，Bのあいた十分大きな遮音板を置いた。ABの垂直2等分線上にスピーカーの先端と原点Oがあり，OZ軸はABに平行である。スピーカーから1000 Hzの正弦波の音波を発し，OZ上で音の強さを測定した。原点Oから出発して，最初に音の強さが極小となる点と原点Oとの距離を求めよ。音速 $V = 300\,\mathrm{m/s}$, $d = 1.0\,\mathrm{m}$, $l = 3.0\,\mathrm{m}$, $L = 100\,\mathrm{m}$ とし，もっとも近い値を選べ。

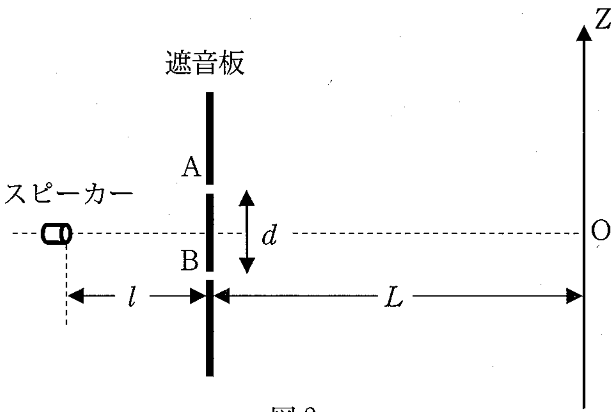


図2

① 3 m　② 5 m　③ 10 m　④ 15 m　⑤ 30 m

問3　霧箱を使い放射線の飛跡を観測した。次のうち，もっとも濃い飛跡を残すものはどれか。

① アルファ線　② エックス線　③ ガンマ線　④ ベータ線

問4　次のうち，電子の反粒子を利用した医療機器はどれか。

① AED　② MRI　③ PET　④ X線CT

II　以下の問1～5に答え，$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{ク}}$にあてはまる式を解答群から選び番号で答えよ。

問1　19世紀にイギリスの植物学者が花粉から放出された粒子が水中で不規則な運動をすることを発見した。このような運動の名称を述べよ。

問2　気体中を漂う粒子（粒子1，2，3）の時刻tにおける位置ベクトル$\vec{r}(t)$を1秒ごとに測定した。粒子は3次元空間を運動するが，ここではx, y成分のみを測定したので，$\vec{r}(t) = (r_x(t),\ r_y(t))$のように2成分ベクトルが求まる。図1は，$\vec{r}(0)$を原点として，$\vec{r}(0)$，$\vec{r}(1)$，$\vec{r}(2)$，...，$\vec{r}(10)$を直線で結んだ結果である。粒子1について，$r(t) = \sqrt{r_x(t)^2 + r_y(t)^2}$を時間の関数として，解答欄図1に折れ線グラフで示せ。

問3　多数の粒子に対する$r(t)^2$の平均値$\overline{r(t)^2}$を求めると，$\overline{r(t)^2} = 4Dt$の関係があることが理論的に分かっている。図1を用いて，$t = 10\,\mathrm{s}$における粒子1，2，3の測定結果から係数Dを有効数字2桁で求めよ。

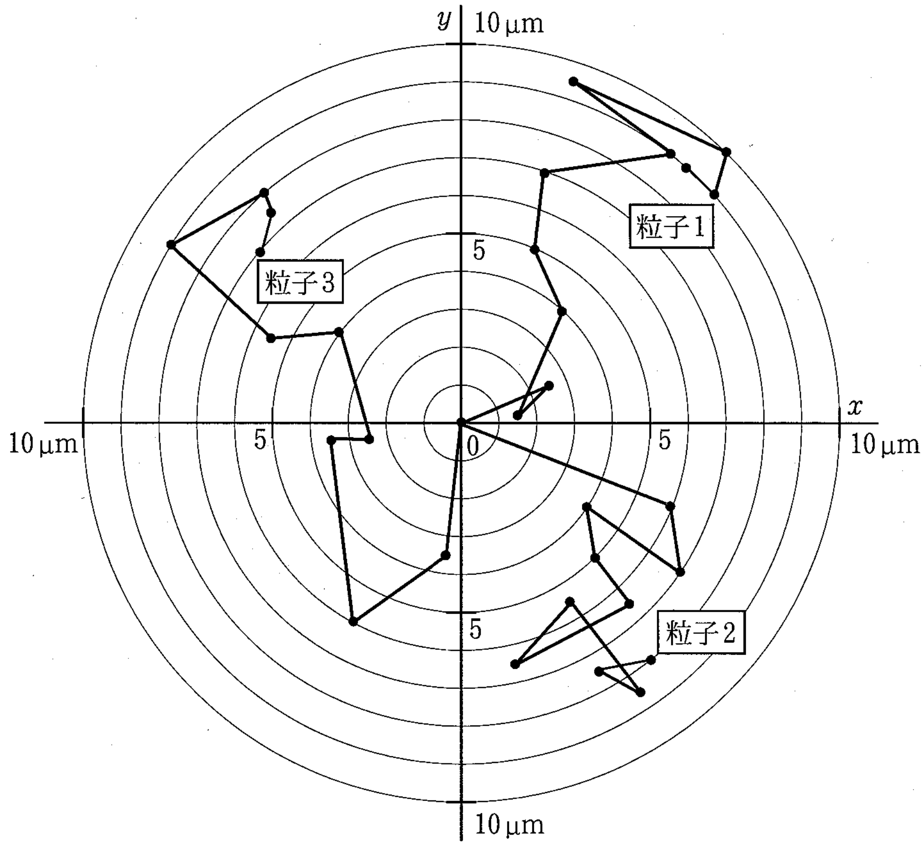


図1

問4　つぎに，気体中を漂う粒子の2次元運動を理論的に考える。ここでは，複数の気体原子（以下，原子とする）が同時に粒子に衝突することはなく，粒子と原子の衝突は弾性衝突とし，重力の影響は無視する。ベクトルの大きさはベクトル記号から矢印を外した記号で表す。

図2に示すような粒子と原子の衝突を考える。粒子の質量をM，原子の質量をm，衝突前の粒子の速度を$\vec{V}=(V_x,\ V_y)$，衝突前の原子の速度を$\vec{v}=(v_x,\ v_y)$，衝突後の粒子の速度を$\vec{V}'=(V'_x,\ V'_y)$，衝突後の原子の速度を$\vec{v}'=(v'_x,\ v'_y)$とする。衝突に伴う粒子の運動エネルギーの変化ΔKは，M，$\vec{V}$，$\vec{V}'$を用いて表すと，

$\Delta K=$（衝突後の粒子の運動エネルギー）$-$（衝突前の粒子の運動エネルギー）$=\boxed{\quad ア \quad}$

となる。

粒子と原子の重心の速度$\vec{v}_{\mathrm{c}}=(v_{\mathrm{c}x},\ v_{\mathrm{c}y})$は，

$$\vec{v}_{\mathrm{c}}=\frac{M\vec{V}+m\vec{v}}{M+m}$$

である。重心に対する相対速度を求めよう（図3参照）。衝突前の粒子の相対速度$\vec{V}_{\mathrm{G}}=(V_{\mathrm{G}x},V_{\mathrm{G}y})$と衝突前の原子の相対速度$\vec{v}_{\mathrm{G}}=(v_{\mathrm{G}x},\ v_{\mathrm{G}y})$は$M$，$m$，$\vec{V}$，$\vec{v}$を用いて表すと，

$$\vec{V}_{\mathrm{G}}=\vec{V}-\vec{v}_{\mathrm{c}}=\boxed{\quad イ \quad}$$
$$\vec{v}_{\mathrm{G}}=\vec{v}-\vec{v}_{\mathrm{c}}=\boxed{\quad ウ \quad}$$

となる。また，$\vec{v}_{\mathrm{c}}$はM，m，$\vec{V}'$，$\vec{v}'$を用いて表すと，$\vec{v}_{\mathrm{c}}=\boxed{\quad エ \quad}$となる。このことを用いると，重心に対する衝突後の粒子の相対速度$\vec{V}'_{\mathrm{G}}=(V'_{\mathrm{G}x},\ V'_{\mathrm{G}y})$と衝突後の原子の相対速度$\vec{v}'_{\mathrm{G}}=(v'_{\mathrm{G}x},\ v'_{\mathrm{G}y})$は，$M$，$m$，$\vec{V}'$，$\vec{v}'$を用いて表すことができる。粒子と原子の衝突が弾性衝突なので，$\vec{V}_{\mathrm{G}}$と$\vec{V}'_{\mathrm{G}}$の間には，$V_{\mathrm{G}}=V'_{\mathrm{G}}$の関係がある。

ΔKは，M，$\vec{V}_{\mathrm{G}}$，$\vec{V}'_{\mathrm{G}}$，$\vec{v}_{\mathrm{c}}$を用いて表すと，

$$\Delta K=M\times\left(\boxed{\quad オ \quad}-\boxed{\quad カ \quad}\right)$$

となる。

つぎに，ΔKの平均値を求める。粒子と原子の衝突は一定ではないので，同一の$\vec{V}_{\mathrm{G}}$と$\vec{v}_{\mathrm{G}}$の組であっても，衝突後はいろいろな速度になる。このため，$\vec{V}'_{\mathrm{G}}$と$\vec{V}_{\mathrm{G}}$のなす角度がθとなる場合と$-\theta$となる場合が同じ頻度で生じ（図4参照），$\vec{V}'_{\mathrm{G}}$の平均は，$\overline{\vec{V}'_{\mathrm{G}}}=\cos\theta\,\vec{V}_{\mathrm{G}}$となる。このことから，$\Delta K$の平均値$\overline{\Delta K}$は$M$，$\theta$，$\vec{v}_{\mathrm{c}}$，$\vec{V}_{\mathrm{G}}$を用いて表すと，

$$\overline{\Delta K}=M(\cos\theta-1)\times\boxed{\quad キ \quad}$$

となる。$\vec{v}_{\mathrm{c}}$と$\vec{V}_{\mathrm{G}}$は$\vec{v}$と$\vec{V}$により表すことができるので，$\overline{\Delta K}$は，

$$\overline{\Delta K}=2\,\frac{(\cos\theta-1)Mm}{(M+m)^2}\left(\frac{1}{2}MV^2-\frac{1}{2}mv^2+\boxed{\quad ク \quad}\times\frac{1}{2}(v_xV_x+v_yV_y)\right)$$

となる。

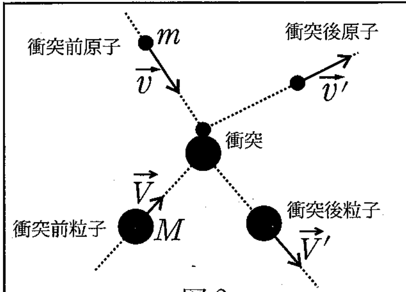


図2

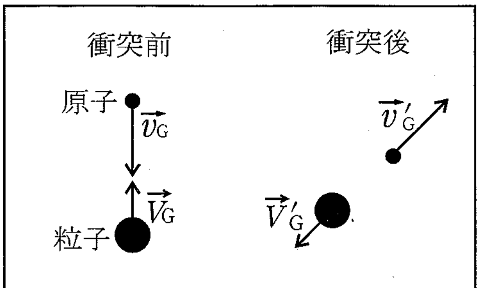


図3　重心を基準とした相対速度

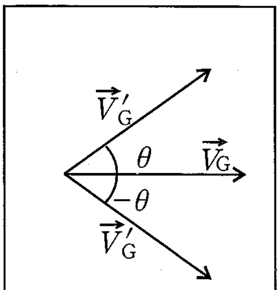


図4

最後に，衝突前の速度 $\vec{V}$ と $\vec{v}$ に関する平均を考えよう。粒子と原子はどちらも乱雑に動いているので，粒子の速度が $\vec{V}$ のとき原子の速度は $\vec{v}$ と $-\vec{v}$ が同じ頻度で存在する。このことから，衝突前の速度に関する平均を行うと $\overline{v_xV_x+v_yV_y}=0$ となる。衝突前の速度に関する平均と θ が 0 から180度まで取り得ることを考慮した平均を $\overline{\Delta K}$ に対して行うと，

$$\overline{(\overline{\Delta K})}=2\frac{(\overline{\cos\theta}-1)Mm}{(M+m)^2}\left(\frac{1}{2}M\overline{V^2}-\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right)$$

となることが導かれる。

問5　気体の温度が一定の場合，$\overline{(\overline{\Delta K})}$ から，粒子の運動エネルギーの平均値は多数回衝突するとどのようになるといえるか。理由を付けて述べよ。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

① $\frac{1}{2}M(V_xV'_x-V_yV'_y)$　② $\frac{1}{2}M(V_xV'_y-V_yV'_x)$　③ $\frac{1}{2}M(V'^2-V^2)$　④ $\frac{1}{2}M(V^2-V'^2)$

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

① $\dfrac{m(\vec{V}+\vec{v})}{M+m}$　② $\dfrac{m(\vec{V}-\vec{v})}{M+m}$　③ $\dfrac{m(\vec{v}-\vec{V})}{M+m}$

④ $\dfrac{M(\vec{V}+\vec{v})}{M+m}$　⑤ $\dfrac{M(\vec{V}-\vec{v})}{M+m}$　⑥ $\dfrac{M(\vec{v}-\vec{V})}{M+m}$

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

① $\dfrac{m\vec{V}'+M\vec{v}'}{M+m}$　② $\dfrac{m\vec{V}'-M\vec{v}'}{M+m}$　③ $\dfrac{m(\vec{v}'+\vec{V}')}{M+m}$

④ $\dfrac{M\vec{V}'+m\vec{v}'}{M+m}$　⑤ $\dfrac{M\vec{V}'-m\vec{v}'}{M+m}$　⑥ $\dfrac{M(\vec{v}'+\vec{V}')}{M+m}$

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

① v_CV_G　② $v_CV'_G$　③ $v_C\sqrt{V_GV'_G}$　④ $v_C(V_G+V'_G)$

⑤ $v_{Cx}V_{Gx}+v_{Cy}V_{Gy}$　⑥ $v_{Cx}V'_{Gx}+v_{Cy}V'_{Gy}$　⑦ $v_{Cx}V_{Gy}+v_{Cy}V_{Gx}$　⑧ $v_{Cx}V'_{Gy}+v_{Cy}V'_{Gx}$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

① $M+m$　② $-M-m$　③ $M-m$　④ $m-M$

⑤ $\sqrt{Mm}$　⑥ $-\sqrt{Mm}$　⑦ $\dfrac{Mm}{M+m}$　⑧ $-\dfrac{Mm}{M+m}$

Ⅲ　以下の問に答えよ。

問１　図１～図３は４つの長い直線電流，図４は正方形の電流，図５は直角に折れまがった４つの長い電流を表す。矢印は電流の向きを表し，電流の大きさはすべて等しく I である。複数の電流によって点A～Eにつくられる磁束密度ベクトルは，それぞれの電流がその点につくる磁束密度ベクトルの合成で表される。真空の透磁率を μ_0 とする。

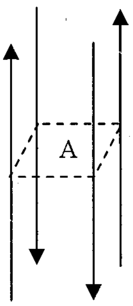


図１
４つの電流は１辺 $2a$ の正方形の面に垂直に各頂点を通る。点Aはこの正方形の中心点。

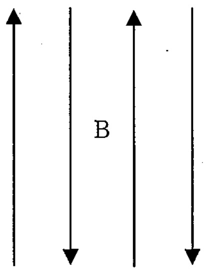


図２
４つの電流は同一平面上にあり，等間隔 $2a$ で平行である。点Bは中央の２本の電流から等距離 a の点。

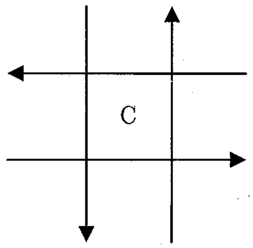


図３
間隔 $2a$ の２組の平行な電流が同一平面上にあって直交している。点Cはこのときできる正方形の中心点。

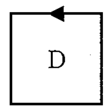


図４
点Dは１辺 $2a$ の正方形の中心点。

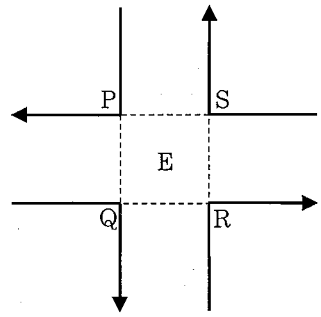


図５
４つの隣り合う電流は同一平面上にあり $2a$ の間隔である。折れ曲がりの点P，Q，R，Sは１辺 $2a$ の正方形をつくる。点Eはこの正方形の中心点。

（１）　直線電流 I から距離 r の位置における磁束密度は $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ で表される。点A，B，Cにおける磁束密度を I，a，μ_0 を使って表せ。

（２）　計算によれば，点Dにおける磁束密度ベクトルは，この紙面に垂直で裏から表の向きに大きさ $B=\dfrac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$ である。点Cにおける磁束密度，および，円電流（半径 a，電流 I）が中心につくる磁束密度は，点Dにおける磁束密度の何倍か。有効数字２桁で求めよ。$\sqrt{2}=1.4$，$\pi=3.1$ としてよい。

（３）　点Eにおける磁束密度を I，a，μ_0 を使って表せ。

問２　導線を同じ向きに筒形に均一に巻いたものをソレノイドと呼ぶ。図６のように，巻き数 N[回]，長さ l，断面が正方形（１辺 $2a$）のソレノイドを作り，起電力 V の電池と２つの抵抗をソレノイドに接続してスイッチＳをしばらく開いた状態にした。電流を流したときのソレノイド内部の磁束密度は一様で筒の中心軸に平行であり，真空の透磁率 μ_0，電流 I，１ｍあたりの巻き数 n [回 /m] を使い，$B=\mu_0 nI$ と表わされる。このソレノイドの自己インダクタンスを L とし，電気抵抗は無視できるものとする。

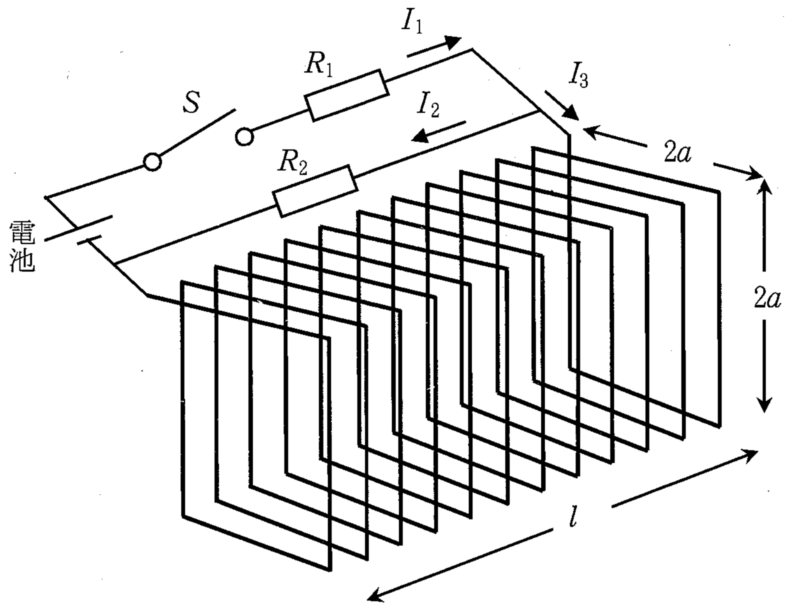
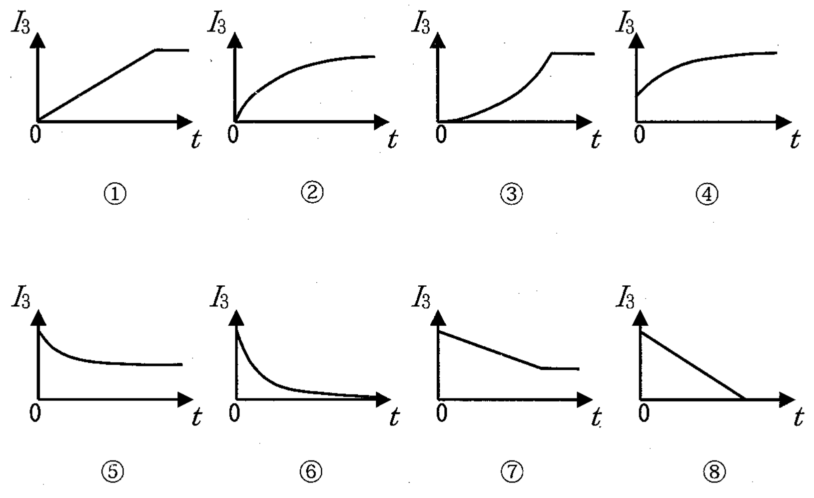


図 6

（1） スイッチ S を閉じた瞬間に抵抗 R_1 を流れる電流 I_1 はいくらか。

（2） スイッチ S を閉じた直後からソレノイドを流れる電流 I_3 の時間変化として適したものを以下の図 ① ～ ⑧ から選べ。



（3） スイッチ S を閉じた後，しばらく経つと抵抗 R_1 を流れる電流 I_1 は一定になった。このとき，抵抗 R_2 を流れる電流 I_2，および，ソレノイドを流れる電流 I_3 はいくらか。

（4） 自己インダクタンス L を μ_0，a，l，N を使って表せ。

（5） 次に，スイッチ S を開いた後，抵抗 R_2 で発生するジュール熱の総量を求めよ。ただし，$V = 10\,\mathrm{V}$，$R_1 = 10\,\Omega$，$R_2 = 20\,\Omega$，$a = 0.10\,\mathrm{m}$，$l = 2.0\,\mathrm{m}$，$N = 2000$ 回とし，$\mu_0 = 1.3\times10^{-6}\ \mathrm{N/A^2}$ としてよい。