[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1) 角 α が $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\alpha = 1$ を満たすとき, $\tan\alpha =$ $\boxed{\text{(あ)}}$, $\sin 2\alpha =$ $\boxed{\text{(い)}}$ である。

(2) どのような実数 c_1, c_2 に対しても関数 $f(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x}$ は関係式

$$f''(x) + \boxed{\text{(う)}}\, f'(x) + \boxed{\text{(え)}}\, f(x) = 0$$

を満たす。

(3) 関数 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ のグラフと x 軸および直線 $x = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_1, y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると $V_1 = \dfrac{\pi}{2}\boxed{\text{(お)}}$, $V_2 = \dfrac{\pi}{2}\boxed{\text{(か)}}$ である。

［Ⅱ］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問(2)(ii)に答えなさい。

座標平面において A$(a,\ 0)$（ただし $a>0$）を x 軸上の定点とし，曲線 C を双曲線 $2x^2-y^2=1$ の $x>0$ に対する部分とする。曲線 C 上の点 Q に対し，点 P が直線 $y=x$ 上を動くときの AP＋PQ の最小値を $r(\mathrm{Q})$ と定義する。

(1) Q$(1,\ -1)$ に対して $r(\mathrm{Q})$ を a の式で表すと $r(\mathrm{Q})=$ $\boxed{\text{（あ）}}$ であり，Q$(2,\ \sqrt{7})$ に対しては $r(\mathrm{Q})=$ $\boxed{\text{（い）}}$ である。

(2) さらに Q が曲線 C 上を動くときの $r(\mathrm{Q})$ の最小値を考える。

(i) $r(\mathrm{Q})$ が Q$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ において最小値をとるのは $a=$ $\boxed{\text{（う）}}$ のときであり，Q$(2,\ \sqrt{7})$ において最小値をとるのは $a=$ $\boxed{\text{（え）}}$ のときである。

(ii) $r(\mathrm{Q})$ が Q$(1,\ 1)$ において最小値をとるような a の範囲を求めなさい。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

三角形が1つと球がたくさん用意されている。三角形の各頂点上には高々2個の球を置くことができるとし，三角形上の頂点以外の位置には球を置くことができないとする。三角形上に少なくとも1個の球が置かれている状態に対して次の操作Tを考える。

操作T

（T1）　三角形上の球どれか1個を等しい確率で選ぶ。

（T2）　(a)　確率 $\frac{1}{2}$ で，（T1）により選ばれた球が置かれている頂点上に三角形外から球を1個加える。

(b)　確率 $\frac{1}{4}$ ずつで，（T1）により選ばれた球を隣の2つの頂点のどちらかに移す。

（T3）　（T2）の結果，1つの頂点上に3個の球が置かれた場合は，その3個目の球を直前にあった位置に戻す。

また，次の4つの状態を考える。

A：2つの頂点上に2個ずつ球が置かれ，1つの頂点上には何も置かれていない状態

B：1つの頂点上に2個の球が置かれ，2つの頂点上に1個ずつ球が置かれている状態

C：三角形上に合計5個の球が置かれている状態

D：三角形上に合計6個の球が置かれている状態

いま，状態Aから始め，操作Tを何回か繰り返し行う。以下，各回の操作を（T3）まで終えたときの状態のみに着目し，操作途中の状態を考えないものとする。また，n を自然数とする。

（1）　操作Tを n 回繰り返し終えたとき，状態がAである確率を a_n，状態がBである確率を b_n とする。$a_1=$ （あ），$b_1=$ （い） である。さらに，$n \geqq 2$ に対して a_n，b_n を a_{n-1}，b_{n-1} で表すと

$$\begin{cases} a_n = \boxed{（う）}\, a_{n-1} + \boxed{（え）}\, b_{n-1} \\ b_n = \boxed{（お）}\, a_{n-1} + \boxed{（か）}\, b_{n-1} \end{cases}$$

である。これより a_n-b_n，$a_n+\frac{1}{2}b_n$ をそれぞれ n の式で表すと $a_n-b_n=$ （き），$a_n+\frac{1}{2}b_n=$ （く） である。

（2） 操作Tを n 回繰り返し終えたとき初めて状態がCになる確率を c_n とする。c_n を n の式で表すと $c_n =$ $\boxed{\text{（け）}}$ である。

（3） 操作Tを n 回繰り返し終えたとき初めて状態がDになる確率を d_n とする。$n \geqq 3$ に対して d_n を n の式で表すと

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-2} \boxed{\text{（こ）}}$$

である。

［Ⅳ］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問（3）に答えなさい。

関数 $y=f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq a$（ただし $a>0$）において微分可能かつ $f'(x)<0$ であり，$f(a)=0$ とする。$0<x<a$ として，点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ における関数 $f(x)$ のグラフの接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ A，B とし，原点を O(0, 0) とする。

（1） △OAB の面積を $S(x)$ として，$S(x)$ を $f(x)$，$f'(x)$ を用いて表すと

$$S(x)=\frac{1}{2}\frac{\left(\boxed{\text{（あ）}}\right)^2}{\boxed{\text{（い）}}}$$

である。

（2） 第2次導関数 $f''(x)$ が存在するとき

$$\frac{d}{dx}\log S(x)=\frac{\boxed{\text{（う）}}}{\boxed{\text{（え）}}} \qquad (0<x<a)$$

である。

（3） さらに区間 $0 \leqq x \leqq a$ において $f''(x)<0$ ならば，関数 $S(x)$ は区間 $0<x<a$ のちょうど1点で最小値をとることを示しなさい。

（4） $f(x)=5-(x+1)^2$ のとき区間 $0<x<\sqrt{5}-1$ において $S(x)$ が最小値をとる点 x_0 を求めると $x_0=\boxed{\text{（お）}}$ である。