

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1) $a > 1$ に対し、集合 $A(a)$ を

$$A(a) = \left\{ x \mid x \text{ は実数かつ } \log_a(x+2a) - \log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{x}{4}\right) < 2 \right\}$$

により定義するとき、 $A(a) \subset (-\infty, 4)$ となるような a の範囲を不等式で表すと、

である。

(2) ベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} はどれも大きさが 1 で、 $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c} = \vec{0}$ を満たしている。

このとき、 \vec{a} と \vec{b} の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ であり、 $|\vec{a} + \vec{b} + t\vec{c}|$ は

$t =$ のとき、最小値 をとる。

(3) k を自然数とする。赤い玉と白い玉がそれぞれ $2k$ 個ずつある。これらをすべて

円周上に等間隔に並べる並べ方の総数を N_k とおくと、

$$N_1 = \text{, } N_2 = \text{, } N_3 = \text{$$

である。ただし、回転して並びが同じになるものは同じ並べ方と考える。

[II]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

k を 2 以上の自然数とする。2 つの袋 A, B があり, 袋 A には番号 1 から k までが書かれたカードが 1 枚ずつ (計 k 枚) 入っていて, 袋 B には番号 0 から 2 までが書かれたカードが 1 枚ずつ (計 3 枚) 入っているとす。この状態から始めて, 以下の操作 T を繰り返し行う。

操作 T

- (T1) それぞれの袋の中から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出す。
- (T2) (i) 取り出した 2 枚のカードの番号が同じ場合は, 取り出したカードを 2 枚とも袋 A に入れる。
- (ii) 取り出した 2 枚のカードの番号が異なる場合は, 取り出した 2 枚のカードそれぞれをもとの袋に戻す。

以下, n を自然数とする。操作 T を n 回繰り返し終えたとき, 袋 B の中にカードが 3 枚入っている確率を $a_n(k)$, ちょうど 2 枚入っている確率を $b_n(k)$ とする。

(1) $n \geq 2$ のとき, $a_n(k)$, $b_n(k)$ を $a_{n-1}(k)$, $b_{n-1}(k)$ で表すと,

$$\begin{cases} a_n(k) = \boxed{\text{あ}} a_{n-1}(k) \\ b_n(k) = \boxed{\text{い}} a_{n-1}(k) + \boxed{\text{う}} b_{n-1}(k) \end{cases}$$

である。

(2) (1) より, $a_n(k)$ を k と n の式で表すと, $a_n(k) = \boxed{\text{え}}$ である。また,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(k) = \boxed{\text{お}}$$
 である。

(3) $k = 3$ のとき, $b_n(3)$ を n の式で表すと,

$$b_n(3) = \boxed{\text{か}} \left(\boxed{\text{き}} \right)^n \left\{ 1 - \left(\boxed{\text{く}} \right)^n \right\}$$

である。ただし, $\boxed{\text{か}} > 0$ であり, $\boxed{\text{か}}$, $\boxed{\text{き}}$, $\boxed{\text{く}}$ は文字 n, k を含まないものとする。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄の には適切な式を、それ以外には適切な数を入れて文章を完成させなさい。

(1) x を実数として

$$f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$$

とおく。このとき

$$f(x) = \text{ } \sin 2x + \text{ } \sin 4x + \text{ } \sin 6x$$

と書くことができる。 p を $f(p) = 0$ を満たす最小の正の数とするとき、

曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq p$) と x 軸で囲まれた部分の面積は である。

(2) x を実数として

$$g(x) = -\sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 3x - \sin 3x \sin x$$

とおく。このとき

$$g(x) = \text{ } (\cos 2x + \cos 5x) + \text{ } \cos 3x + \text{ } \cos 4x$$

と書ける。また $g\left(\frac{\pi}{7}\right) = \text{ }$ である。

(3) α, β, γ を実数として

$$A = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$$

$$B = \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma$$

$$C = \sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha$$

とおく。 C を A, B の式で表すと、 $C = \text{ }$ である。

以下、 $\alpha = \frac{\pi}{7}, \beta = -\frac{2\pi}{7}, \gamma = -\frac{3\pi}{7}$ のときを考える。 i を虚数単位として、

$z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ とおくと、 $\sum_{k=1}^7 z^k = \text{ }$ であり、このことから上記の

α, β, γ の値に対して B の値を求めると、 $B = \text{ }$ である。 $g\left(\frac{\pi}{7}\right) = C$ である

ことと、 A の符号に注意すると、 A の値は である。このことから $f\left(\frac{\pi}{7}\right)$ の

値は である。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また設問(2)に答えなさい。

媒介変数表示

$$x=g(\theta)=\theta+\sin\theta, \quad y=h(\theta)=1-\cos\theta \quad (-\pi<\theta<\pi)$$

で表される座標平面上の曲線 C を考える。

- (1) 曲線 C は点(,)において x 軸に接する。また、曲線 C 上の点の x 座標、 y 座標の動く範囲はそれぞれ

$$\text{} < x < \text{}, \quad \text{} \leq y < \text{}$$

である。

- (2) $< x <$ を満たす任意の x に対して、それを x 座標とする C 上の点 P はただ1つに決まることを示しなさい。また、この点 P の y 座標を $y=f(x)$ と書くとき、関数 $f(x)$ のグラフは下に凸であることを示しなさい。

- (3) $0 < t < \pi$ とする。曲線 C の $0 \leq \theta \leq t$ に対する部分の長さ $L(t)$ を求めると、 $L(t) = \text{}$ である。

- (4) $0 < t < \pi$ に対する曲線 C 上の点 $(g(t), h(t))$ を P_t とするとき、 P_t における C の接線を l_t とし、 l_t と x 軸との交点を Q_t とする。 Q_t の x 座標は であり、ベクトル $\overrightarrow{Q_t P_t}$ が x 軸の正の向きとなす角は ラジアンである。

- (5) 曲線 C が、 x 軸に接しつつ、すべることなく右方向に回転する。回転する前の C 上の点 $P_t(g(t), h(t))$ ($0 < t < \pi$) が x 軸との接点になるまで C が回転したとき、回転する前の点 $P_0(g(0), h(0))$ が点 $R_t(a(t), b(t))$ に移動したとする。 $a(t)$ 、 $b(t)$ を t の式で表すと、

$$a(t) = \text{}, \quad b(t) = \text{}$$

である。

- (6) 動点 R_t ($0 < t < \pi$) の軌跡、 x 軸、および直線 $x = \alpha$ で囲まれた部分の面積は である。ただし $\alpha = \lim_{t \rightarrow \pi-0} a(t)$ とする。